УДК 539.12

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

А.Н. Годлевская, Н.Н. Егоров, А.Н. Сердюков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

GRAVITATIONAL WAVES IN THE EXTERNAL GRAVITATIONAL FIELD

A.N. Godlevskaya, N.N. Egorov, A.N. Serdyukov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В рамках релятивистской калибровочно-инвариантной модели скалярного гравитационного поля развивается теория распространения неоднородных по своей природе плоских гравитационных волн в свободном пространстве и в сплошной среде при воздействии внешнего поля тяготения.

Ключевые слова: *гравитационные волны, калибровочно-инвариантная модель, скалярное поле, волновое уравнение, частотная дисперсия, нейтронная звезда.*

The theory of propagation of non-uniform plane gravitational waves in the free space and in the continuous medium at the influence of the external gravitational field on the basis of relativistic gauge-invariant model of scalar gravitational field is developed.

Keywords: *gravitational waves, gauge-invariant model, scalar field, wave equation, frequency dispersion, neutron star.*

Введение

Исследование проблемы гравитационного излучения в метрических теориях тяготения сопряжено с известными математическими трудностями, возникающими из-за существенно нелинейного характера полевых уравнений. Поэтому при изучении гравитационных волн, как в общей теории относительности [1]–[3], так и в релятивистской теории гравитации [4] принято ограничиваться рассмотрением слабых полей и строить приближенную теорию гравитационных волн на основе поддающихся аналитическому решению линеаризованных уравнений. В общей теории относительности (ОТО) это соответствует, как известно, приближению малых возмущений метрики пространства-времени, где гравитационные волны рассматриваются как мелкая «рябь» на фоне крупномасштабной кривизны, характерной для внешних полей тяготения [3].

Калибровочно-инвариантная модель тяготения со скалярным потенциалом [5], [6], представляющая последовательное минимальное релятивистское обобщение гравистатики Ньютона в рамках стандартных ограничений теории классических полей [7], [8] и восходящая к ранним попыткам построения релятивистской теории гравитационного поля со скалярным потенциалом [9]–[12], допускает естественную и строгую линеаризацию уравнений поля простой заменой полевых переменных. При этом, как показано в [5], [6], можно обходиться без отмеченных выше упрощающих приближений и развивать точную теорию гравитационных волн в свободном пространстве без ограничения их интенсивности.

В настоящем сообщении в рамках предложенной в [5], [6] модели гравитационного поля решена важная для астрофизических приложений задача распространения гравитационных волн в свободном пространстве и в плотной материальной среде при наличии сильного внешнего поля тяготения.

1 Волновое уравнение

Для получения полевого уравнения гравитационных волн, распространяющихся в условиях воздействия внешних полей тяготения, применим тот же, что и при учете гравитационного взаимодействия в механике и электродинамике [6], [13], способ мультипликативного подключения внешнего гравитационного поля к функции Лагранжа свободной физической системы. Отождествляя свободное гравитационное поле с классическим линейным скалярным безмассовым полем U, в качестве его лагранжиана примем выражение [6]

$$L_0 = -\frac{c^4}{2\pi G}\left(\partial_\mu U\right)^2. \tag{1.1}$$

«Подключение» к (1.1) внешнего поля тяготения

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi_{\text{ext.}} \tag{1.2}$$

приводит к модифицированному лагранжиану

$$L = -\frac{c^4}{2\pi G}\left(\partial_\mu U\right)^2 \exp\left(\frac{\Phi_{\text{ext.}}}{c^2}\right). \tag{1.3}$$

Потенциал внешнего поля Φ_{ext} в дальнейшем будем считать заданным. Поэтому при построении уравнения поля гравитационных волн ограничимся варьированием только волновой полевой переменной U. Таким образом, уравнение Эйлера – Лагранжа

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu U\right)} = \frac{\partial L}{\partial U}$$

с учетом (1.3) примет вид:

$$\partial_\mu \left(\partial_\mu U \cdot \exp\left(\frac{\Phi_{\text{ext.}}}{c^2} \right) \right) = 0.$$

Переходя к трёхмерным обозначениям и учитывая (2), получаем линейное волновое уравнение для потенциальной функции гравитационных волн во внешнем поле тяготения следующего вида:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\mathbf{g}\nabla \right) U = 0. \qquad (1.4)$$

2 Плоские волны

Решения уравнения (1.4) будем искать в виде плоских волн

$$U = U_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} \qquad (2.1)$$

с постоянной амплитудой U_0. Подставляя (2.1) в (1.4), получим

$$\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\mathbf{kg}}{c^2} \right) U = 0. \qquad (2.2)$$

Как видно из (2.2), условием существования нетривиальных решений для U будет дисперсионное уравнение

$$\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\mathbf{kg}}{c^2} = 0. \qquad (2.3)$$

Очевидно, никакие вещественные значения – одновременно для $\mathbf{k}$ и ω –при условии $\mathbf{kg} \neq 0$ не могут удовлетворить этому уравнению. Поэтому при вещественных частотах ω его решения для $\mathbf{k}$ следует искать в комплексной форме: $\mathbf{k} = \mathbf{K} + i\mathbf{N}$, где $\mathbf{K}$ и $\mathbf{N}$ – некоторые вещественные векторы, которые предстоит определить.

Допуская комплексную форму волнового вектора $\mathbf{k}$, мы, тем самым, переходим к поиску решений волнового уравнения (1.4) для скалярного поля U в виде неоднородных плоских волн

$$U = U_0 e^{-\mathbf{Nr}} e^{i(\mathbf{Kr} - \omega t)}. \qquad (2.4)$$

Таким образом, из (2.3) получаем уравнение

$$\mathbf{K}^2 - \mathbf{N}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mathbf{Ng}}{c^2} + 2i\mathbf{KN} + \frac{i\mathbf{Kg}}{c^2} = 0,$$

которое преобразуется в систему уравнений для $\mathbf{K}$ и $\mathbf{N}$ – вещественной и мнимой частей вектора $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{K}^2 - \mathbf{N}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mathbf{Ng}}{c^2} = 0, \qquad (2.5)$$

$$\mathbf{K}\left(\mathbf{N} + \frac{\mathbf{g}}{2c^2} \right) = 0. \qquad (2.6)$$

Эти соотношения должны выполняться для всех направлений волновой нормали $\mathbf{n}$. Поскольку $\mathbf{K} \parallel \mathbf{n}$, то из (2.6) следует

$$\mathbf{N} = -\frac{\mathbf{g}}{2c^2}. \qquad (2.7)$$

Подставляя далее (2.7) в (2.5), получим дисперсионное уравнение для волнового вектора $\mathbf{K}$ неоднородной гравитационной волны

$$\mathbf{K}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\mathbf{g}^2}{4c^4} = 0. \qquad (2.8)$$

Отсюда находим значение модуля $\mathbf{K}$

$$K = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\mathbf{g}^2}{4c^2\omega^2}}. \qquad (2.9)$$

Аналогично теории электромагнитных волн введем для рассматриваемых волн показатель преломления $n(\omega)$, полагая

$$\mathbf{K} = \frac{\omega n(\omega)}{c}\mathbf{n}.$$

Из (2.9) при этом следует

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2}}, \qquad (2.10)$$

где

$$\Omega_0 = \frac{g}{2c}. \qquad (2.11)$$

Как видим, показатель преломления гравитационных волн, распространяющихся во внешнем поле тяготения, зависит от частоты. Это означает, что пространство, заполненное полем тяготения, в отношении условий распространения гравитационных волн проявляет себя как среда, обладающая частотной дисперсией.

Из (2.7), (2.10), (2.11) окончательно находим комплексный волновой вектор $\mathbf{k} = \mathbf{K} + i\mathbf{N}$ гравитационной волны во внешнем поле тяготения $\mathbf{g}$:

$$\mathbf{k} = \frac{n(\omega)\omega}{c}\mathbf{n} - i\frac{\mathbf{g}}{2c^2}. \qquad (2.12)$$

С учётом (2.12) для потенциальной функции (2.1) можем записать следующее выражение:

$$U = U_0 \exp\left(\frac{\mathbf{gr}}{2c^2} \right) \exp\left[i\left(\frac{n\omega}{c}\mathbf{nr} - \omega t \right) \right]. \qquad (2.13)$$

Эта функция описывает плоскую неоднородную волну с постоянным амплитудным коэффициентом U_0, распространяющуюся в направлении фазовой волновой нормали $\mathbf{n}$ и затухающую в направлении, противоположном вектору напряжённости $\mathbf{g}$ внешнего поля, с таким же коэффициентом экстинкции, как и в случае электромагнитных волн [13], [14].

Как видно из (2.10), особенностью частотной дисперсии гравитационных волн во внешнем поле тяготения является наличие критической частоты (2.11). В диапазоне частот $\omega < \Omega_0$ волновой вектор (2.12) оказывается мнимым, и волновой процесс вырождается в затухающее в пространстве колебание поля. Таким образом, волновой процесс на частотах, меньших критической, подавляется полем тяготения.

3 Энергия гравитационного излучения

Определим скорость переноса энергии неоднородной гравитационной волной во внешнем поле тяготения. Канонический тензор энергии-импульса скалярного поля [7], [8]

$$T_{\mu\nu} = L\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U)}\partial_\nu U,$$

определяемый функцией Лагранжа (1.3), имеет вид:

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{\pi G}\left(\partial_\mu U \cdot \partial_\nu U - \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma U\right)^2 \delta_{\mu\nu}\right)\times \times \exp\left(\frac{\Phi_{\text{ext.}}}{c^2}\right). \qquad (3.1)$$

Из (3.1) получаем положительное выражение для плотности энергии $W = -T_{44}$

$$W = \frac{c^4}{2\pi G}\left(\left(\nabla U\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right)\exp\left(\frac{\Phi_{\text{ext.}}}{c^2}\right) \qquad (3.2)$$

и формулу для плотности потока энергии $S_i = -icT_{i4}$:

$$\mathbf{S} = -\frac{c^4}{\pi G}\frac{\partial U}{\partial t}\nabla U \cdot \exp\left(\frac{\Phi_{\text{ext.}}}{c^2}\right). \qquad (3.3)$$

Отделяя вещественную часть в комплексном решении (2.13) и подставляя ее в формулы (3.2), (3.3), после усреднения по периоду колебаний поля найдем

$$\overline{W} = \frac{c^2\omega^2}{2\pi G}\left|U_0\right|^2, \qquad (3.4)$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c^2\omega^2}{2\pi G}\left|U_0\right|^2 cn(\omega)\mathbf{n}. \qquad (3.5)$$

Из выражений (3.4) и (3.5) следует соотношение

$$\overline{\mathbf{S}} = \overline{W}cn(\omega)\mathbf{n}, \qquad (3.6)$$

которое означает, что перенос энергии гравитационными волнами при их распространении во внешнем поле тяготения осуществляется в направлении фазовой нормали **n** со скоростью $\upsilon_{\text{эн.}} = cn(\omega)$. Эта величина, как легко убедиться, совпадает с групповой скоростью

$$\upsilon_{\text{гр}} = c\left[\frac{d\left(\omega n(\omega)\right)}{d\omega}\right]^{-1}.$$

4 Гравитационные волны в сплошной среде нейтронной звезды

При решении задач об излучении гравитационных волн в свободное пространство возникает необходимость рассмотрения их распространения в сплошной среде плотного источника (например, внутри нейтронной звезды) при наличии сверхмощного поля тяготения. Поле гравитационного излучения в этом случае будет описываться полным лагранжианом системы «поле – материя» [5], [6], модифицированным с учетом внешнего поля тяготения:

$$L = -\left(\frac{c^4}{2\pi G}\left(\partial_\mu U\right)^2 + c^2\mu_0\right)\exp\left(\frac{\Phi_{\text{ext.}}}{c^2}\right), \qquad (4.1)$$

где μ_0 – плотность звезды. Для упрощения задачи будем рассматривать ограниченный участок звездной среды вблизи поверхности, считая μ_0 в его пределах постоянной величиной.

Применяя вариационный принцип, из (4.1) получим волновое уравнение

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\mathbf{g}\nabla - \frac{\omega_0^2}{c^2}\right)U = 0, \qquad (4.2)$$

где для удобства введено обозначение

$$\omega_0 = \sqrt{2\pi G\mu_0}. \qquad (4.3)$$

По-прежнему ограничиваясь рассмотрением плоских волн вида (2.1), переходим от (3.6) к алгебраическому уравнению

$$\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2 - \Omega^2}{c^2} + i\frac{\mathbf{kg}}{c^2}\right)U = 0, \qquad (4.4)$$

которое имеет ненулевое решение при комплексном волновом векторе

$$\mathbf{k} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \cdot \frac{\omega}{c}\mathbf{n} - i\frac{\mathbf{g}}{2c^2}. \qquad (4.5)$$

Здесь принято обозначение

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \omega_0^2}, \qquad (4.6)$$

где, как и прежде, $\Omega_0 = g/2c$.

Как и в предыдущей задаче, в действительной части вектора (4.5) можно выделить показатель преломления гравитационной волны при ее распространении в сплошной среде звездной материи с учетом поля тяготения:

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}. \qquad (4.7)$$

Из (4.6), (4.7) видно, что для волн в сплошной среде сверхплотных звезд также существует критическая частота Ω, которая сдвинута в область более высоких частот по сравнению с критической частотой в пространстве вне звезды ($\Omega > \Omega_0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вебер, Дж.* Общая теория относительности и гравитационные волны / Дж. Вебер. – М. : ИЛ, 1962. – 271 с.
2. *Ландау, Л.Д.* Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М. : Наука, 1988. – 509 с.
3. *Гравитация* : в 3 т. / Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. – М. : Мир, 1977. – Т. 3. – 510 с.
4. *Логунов, А.А.* Релятивистская теория гравитации / А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили. – Наука, 1989. – 303 с.
5. *Сердюков, А.Н.* Калибровочная теория скалярного гравитационного поля: монография / А.Н. Сердюков. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2005. – 257 с.
6. *Сердюков, А.Н.* Минимальная модель тяготения в рамках стандартных ограничений теории классических полей / А.Н. Сердюков //

Письма в ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 6, № 3 (152) – С. 312–331.

7. *Боголюбов, Н.Н.* Введение в теорию квантованных полей / Н.Н. Боголюбов. – М. : Наука, 2008. – 736 с.

8. *Богуш, А.А.* Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий / А.А. Богуш. – Минск : Наука и техника, 1987. – 359 с.

9. *Nordström, G.* Relativitätsprinzip und Gravitation. / G. Nordström // Phys. Zeitschrift. – 1912. – Bd. 13, S. 1126–1129.

10. *Nordström, G.* Träge und schwere Masse in der Relavitätsmechanik / G. Nordström // Ann. d. Phys. – 1913. – Bd. 40. – S. 856–878.

11. *Nordström, G.* Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips / G. Nordström // Ann. d. Phys. – 1913. – Bd. 42. – S. 533 – 554.

12. *Abraham, M.* Theorie der Elektrizität. 2. B : Elektromagnetische Theorie der Stralung / M. Abraham // Leipzig – Berlin, Teubner Verlag. – 1923. – S. 381–390.

13. *Сердюков, А.Н.* Теоретико-полевая трактовка гравитационного взаимодействия в электродинамике / А.Н. Сердюков // Письма в ЭЧАЯ. – 2011. – Т. 8, № 2 (165) – С. 137–156.

14. *Сердюков, А.Н.* Электромагнитные волны в поле тяготения / А.Н. Сердюков, А.Н. Годлевская // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2006. – Т. 2, № 6 (39). – С. 45–47.

Поступила в редакцию 17.11.11.